

Prof. Dr. Alfred Toth

Semiotik als System qualitativer Zahlen

1. In Toth (2015a) hatten wir Zahl, Anzahl und Nummer auf das folgende semiotische Inklusionsschema abgebildet

Zahl := (M)

↓

Anzahl := (M → (M → O))

↓

Nummer := (M → ((M → O) → (M → O → I))).

Danach sind also Anzahlen Zahlen mit Bezeichnungsfunktionen und Nummern Zahlen mit sowohl Bezeichnungs- als auch Bedeutungsfunktionen. Anders ausgedrückt: Während Zahlen bloße repertoirielle Mittelbezüge sind, enthalten Anzahlen als Zeichenanteil die Objektrelation des Zeichens, und Nummern enthalten als Zeichenanteil eine vollständige Zeichenrelation, also zuzüglich zur Objektrelation auch noch die Interpretantenrelation des Zeichens.

2.1. Die übliche Mathematik ist also nur deswegen quantitativ, weil sie sich semiotisch auf die Erstheit des Zeichens beschränkt. Quantitative Zeichen referieren nicht.

2.2. Referenz und damit Qualität tritt allerdings bereits bei Anzahlen auf, dann nämlich, wenn Objekte gezählt werden, d.h. wenn jedem Objekt Ω bijektiv eine Zahl Z nach dem folgenden Schema abgebildet wird

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ \Omega & \Omega & \Omega & \dots \end{pmatrix}$$

Wir haben dann also

$$Z(\Omega_1), Z(\Omega_2), Z(\Omega_3), \dots, Z(\Omega_n) = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots).$$

2.3. Referenz und Konnexbildung bei Zahlen finden sich erst bei Nummern. Nummern zählen und bezeichnen also gleichzeitig. So referiert z.B. die Nummer 13 auf ein bestimmtes Haus einer bestimmten Straße in einer bestimmten Stadt, d.h. diese Abbildung ist wiederum bijektiv. Ferner muß die Nummer 13 in einer Folge von Nummern stehen, die mindestens die Ordnung der

Peanozahlen, d.h. die Vorgänger-Nachfolgerrelation, aufweist. Dies bedeutet allerdings nicht, daß vor dem Haus Nr. 13 notwendig das Haus Nr. 11 und nach dem Haus Nr. 13 notwendig das Haus Nr. 15 steht. Die Vollständigkeit der Peanozahlen, die bekanntlich durch Induktion gezeigt wird, ist also bei Nummern nicht notwendig gegeben. Das Abbildungsschema von Nummern sieht dann wie folgt aus

$$f: \begin{pmatrix} i & i+j & i+k & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ \Omega & \Omega & \Omega & \dots \end{pmatrix}$$

mit $i, j, k, \dots, n \in \mathbb{N}$ und $i < j < k < \dots < n$.

Wir haben somit

$$N(\Omega_1) < N(\Omega_2) < N(\Omega_3) < \dots < N(\Omega_n) = (\Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3 < \dots).$$

3. Wir können somit die folgende selbstenthaltende Definition der qualitativen Zahl aufstellen

$$Z^* = (Z, A, N).$$

Beachte, daß nach Hegel die Quantität eine Form von Qualität ist. Die zugehörigen semiotischen Matrizen sind

$M(Z) =$	$M(A) =$	$M(N) =$
1.1 1.2 1.3	1.1 1.2 1.3	1.1 1.2 1.3
2.1 2.2 2.3	2.1 2.2 2.3	2.1 2.2 2.3
3.1 3.2 3.3	3.1 3.2 3.3	3.1 3.2 3.3,

$$\text{d.h. } M(Z) \cup M(A) \cup M(N) =$$

$$\begin{matrix} \mathbf{1.1} & \mathbf{1.2} & \mathbf{1.3} \\ \mathbf{2.1} & \mathbf{2.2} & \mathbf{2.3} \\ \mathbf{3.1} & \mathbf{3.2} & \mathbf{3.3} \end{matrix}$$

mit

$$M(Z) \cap M(A) = \qquad M(Z) \cap M(N) = \qquad M(A) \cap M(N) =$$

(1.2, 2.1) =

1.1 **1.2** 1.3

2.1 2.2 2.3

3.1 3.2 3.3

(1.3, 3.1) =

1.1 1.2 **1.3**

2.1 2.2 2.3

3.1 3.2 3.3

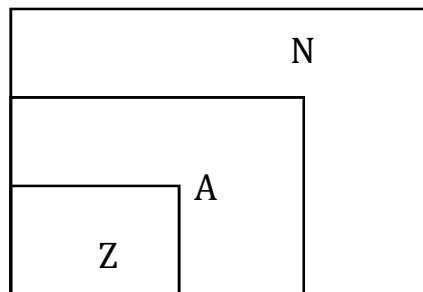
(2.3, 3.2) =

1.1 1.2 1.3

2.1 2.2 **2.3**

3.1 **3.2** 3.3.

Als Venndiagramm dargestellt:



Es gilt somit

$$Z^* = (Z \subset ((Z \subset A) \subset (Z \subset A \subset Z))),$$

und damit haben wir Isomorphie zur Zeichenrelation (vgl. Bense 1979, S. 53 u. 67)

$$S = (M \subset ((M \subset O) \subset (M \subset O \subset I))).$$

4. Wenn wir also nun die Peanozahlen als qualitative Zahlen betrachten

1, 2, 3, ..., n,

dann hat jede Zahl $P \in N$ drei mögliche Interpretationen. Sie kann erstens quantitative Zahl sein, d.h.

$$1 = f(M).$$

Sie kann zweitens Anzahl sein, d.h.

$$1 = f(M, O).$$

Und sie kann drittens Nummer sein, d.h.

$$1 = f(M, O, I).$$

4.1. Addition und Subtraktion

4.1.1. $P = f(M)$

$$3 - 2 \stackrel{?}{=} 1.$$

4

G	(10)	12	14	16	18	—	22
U	11	—	—	—	—		

Diese mit Absicht gewählte hoch defektiven Nummern-Teilsysteme zeigen also folgende Besonderheiten der als Nummern dienenden Peanozahlen:

1. Es gibt keinen absoluten Anfang, d.h. 0 oder 1. Die Nummernfolge beginnt mit 10 (auf dem Plan nicht sichtbar).
2. Das Teilsystem der G weist eine Lücke auf, d.h. $N(18) \neq 20$.
3. Das Teilsystem der U enthält im (abgeschlossenen) Intervall von 11 bis 23 nur die 11.

4.2. Multiplikation und Division

Wie man leicht einsieht, gelten die beiden Operationen wiederum nur für Zahlen und Anzahlen, aber nicht für Nummern. Bei Nummern sind Multiplikation und Division – wie bereits Addition und Subtraktion – ausgeschlossen, denn qualitative Gleichungen wie

$$\text{Nr. } m + \text{Nr. } n = ?$$

$$\text{Nr. } n - \text{Nr. } m = ?$$

$$\text{Nr. } m \cdot n = ?$$

$$\text{Nr. } n : n = ?$$

haben wegen der konnexialen Einbettung der Referenzobjekte der Zahlen überhaupt keinen Sinn (vgl. Toth 2015b, c). Das gilt selbst dort, wo die Rechengesetze der quantitativen Arithmetik gültig sind, wo also z.B. gilt

$$V(\text{Nr. } 3) = \text{Nr. } 1$$

$$N(\text{Nr. } 3) = \text{Nr. } 5,$$

denn die Gleichung

$$\text{Nr. } 1 + \text{Nr. } 3 \neq \text{Nr. } 5$$

ist bei konnexialer Zweiteilung sogar notwendig falsch.

Literatur

Toth, Alfred, Arithmetische und objektale Referenz von Nummern. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015a

Toth, Alfred, Die Arbitrarität von Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015b

Toth, Alfred, Das Diskontinuum von Nummern. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015c

17.8.2019